Méga Maths
© 2014 Dany-Jack Mercier
dany-jack.mercier@hotmail.fr

Trois questions sur les suites (a^n)

Voici trois exercices qui sont placés dans le volume VII de la collection *Acquisition des fondamentaux pour les concours* actuellement en construction. L'étude des suites $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fait partie d'une des leçons d'oral 1 du CAPES externe session 2014, et pendant l'entretien il ne serait pas étonnant de demander au candidat ce qui se passe si a est un nombre complexe.

Le jury pourrait aussi lier l'étude de la convergence de $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ à celle de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$, comme on le fait à la Question 3, et il n'est pas inutile d'étudier directement la convergence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ en s'aidant d'un cercle trigonométrique comme on le propose en seconde solution dans cette même question.

Enfin, ces trois exercices peuvent être signalés par l'orateur comme des prolongations possibles de la leçon. Entraînons-nous donc :

Question 1 *a) Discuter la convergence de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs prises par le nombre réel a.*

b) Si a est un nombre complexe de module 1 *et différent de* 1, *montrer que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

c) Soit $a \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Question 2 *Etudier la convergence des suites $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}$.*

Question 3 *Etudier la convergence des suites $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}$. Que dire des suites $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Réponse 1 a) On envisage tous les cas possibles :

- Si $a > 1$ on écrit $a = 1 + b$ avec $b > 0$, de sorte que :

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2} b^2 + ... + b^n \geq 1 + nb.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(1+nb) = +\infty$, on déduit que $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

- Si $a = 1$, alors $a^n = 1$ pour tout n, donc la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

[0] [b140430] v1.00 © 2013 Dany-Jack Mercier

- Si $|a| < 1$, alors $\lim a^n = 0$. C'est trivial si $a = 0$. Si $a \neq 0$, on se ramène au premier cas en posant $b = 1/|a|$. Comme $b > 1$ on obtient $\lim_{n \Rightarrow +\infty} b^n = +\infty$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} |a|^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b^n} = 0$$

en appliquant les théorèmes généraux sur les limites. On conclut en rappelant que $\lim_{n\to+\infty} |a|^n = 0$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.

- Si $a = -1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puisqu'elle prend successivement les valeurs $+1$ et -1.

- Si $a < -1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Pour le voir, on raisonne par l'absurde : si $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avait une limite réelle, la suite $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en aurait une aussi, ce qui est absurde puisque $\lim_{n\to+\infty} |a|^n = +\infty$ d'après le premier point !

Remarques — α) D'autres démonstrations existent. Ainsi $\ln a^n = n \ln a$ permet d'affirmer que $\ln a^n$ tend vers $+\infty$ si $a > 1$, et par composition de limites, que $a^n = e^{n \ln a}$ tend vers $+\infty$. De même si $|a| < 1$ la convergence de $\ln |a|^n = n \ln |a|$ vers $-\infty$ entraîne celle de $|a|^n$ vers 0.

β) Quand $0 < a < 1$, on peut utiliser la décroissance de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour étudier sa limite. En effet, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante minorée par 0, donc converge vers un réel l qui vérifie $l = al$ (passer à la limite dans $a^{n+1} = aa^n$). D'où $l = 0$.

γ) Si $a < -1$, alors $\left(a^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $\left(a^{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$. En effet, si l'on pose $a = -b$ avec $b > 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lim_{k\to+\infty} a^{2k} = \lim_{k\to+\infty} b^{2k} = +\infty \\ \lim_{k\to+\infty} a^{2k+1} = -\lim_{k\to+\infty} b^{2k+1} = -\infty \end{cases}$$

en appliquant le premier point. La suite $(a^n)_{k\in\mathbb{N}}$ admet donc deux valeurs d'adhérence $\pm\infty$ sur la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

b) *Première solution* — On raisonne par l'absurde. Si la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendait vers l, la suite des modules $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendrait vers $|l|$. Mais $|a|^n = 1$ pour tout n, donc $|l| = 1$. En passant à la limite dans l'égalité $a^{n+1} = a^n \times a$, on obtiendrait $l = la$, d'où $a = 1$ puisque $l \neq 0$. C'est absurde.

Deuxième solution — Si a est de module 1 et différent de 1, il existe un réel t non congru à 0 modulo 2π, tel que $a = e^{it}$. Raisonnons par l'absurde. Si la suite $(e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait dans $\mathbb{C}$, elle serait de Cauchy donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $p > q > N$ entraîne $\left|e^{ipt} - e^{iqt}\right| < \varepsilon$. Comme :

$$\left|e^{ipt} - e^{iqt}\right| = \left|e^{i(p-q)t} - 1\right| = \left|e^{i\frac{p-q}{2}t} - e^{-i\frac{p-q}{2}t}\right| = 2\left|\sin\frac{(p-q)t}{2}\right|,$$

il suffit de prendre $p = q + 2$ pour obtenir :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad q > N \;\Rightarrow\; |\sin t| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $|\sin t| < \varepsilon$ pour tout ε, autrement dit que $\sin t = 0$. Cela entraîne $a = \pm 1$, et comme par hypothèse $a \neq 1$, on obtient $a = -1$. Mais la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, absurde.

c) On envisage tous les cas :

- Si $|a| > 1$, la question a) montre que la suite $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi (si l'on avait $\lim_{n\to+\infty} a^n = l$ pour un certain $l \in \mathbb{C}$, on aurait $\lim_{n\to+\infty} |a|^n = |l|$, ce qui est absurde puisque $|a| > 1$).

- Si $|a| < 1$, le a) montre que $\lim_{n\to+\infty} |a|^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Dans ce cas la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- Si $|a| = 1$, le b) montre que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $a = 1$.

En conclusion la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|a| < 1$ ou $a = 1$.

Réponse 2 Si la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite finie l, il suffit de passer à la limite dans l'égalité $e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta}e^{in\theta}$ pour obtenir $l = e^{i\theta}l$, d'où $e^{i\theta} = 1$ (l ne peut pas être nul car si $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l, alors $|e^{in\theta}| = 1$ tend vers $|l|$, donc $|l| = 1$), et cela prouve que $\theta = 0 \;\; (2\pi)$.
Réciproquement, si $\theta = 0 \;\; (2\pi)$, alors la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire car tous ses termes valent 1, donc converge. En conclusion, la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\theta = 0 \;\; (2\pi)$.

Remarque — On a déjà donné cette réponse au b) de la Question 1 dans le contexte différent de trois questions enchaînées.

Réponse 3 • Si la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite finie l, il suffit de passer à la limite dans les égalités $\sin^2 n\theta = 1 - \cos^2 n\theta$ pour obtenir :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^2 n\theta = 1 - l^2.$$

De $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ on tire $-1 \leq l \leq 1$ par passage à la limite, donc $1 - l^2$ est positif, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin n\theta = \sqrt{1 - l^2}.$$

Les suites $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc convergentes, et il en sera de même de la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ puisque $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$. Mais on sait que

la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\theta \equiv 0\ \ (2\pi)$ (Question 2). On peut donc affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \cos n\theta \text{ existe} \quad \Rightarrow \quad \theta \equiv 0\ \ (2\pi)\,.$$

Si $\theta \equiv 0\ \ (2\pi)$, $\cos n\theta = 1$ quel que soit n, et la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers 1. En conclusion la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\theta \equiv 0\ \ (2\pi)$.

• Ce qui a été fait avec les suites $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être recommencé avec les suites $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut donc affirmer que $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\theta \equiv 0\ \ (2\pi)$.

Autre solution — Etudions la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant le cercle trigonométrique. Tout d'abord on voit bien que la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $\theta \equiv 0\ \ (2\pi)$, et diverge si $\theta \equiv \pi\ \ (2\pi)$. On peut donc travailler sous l'hypothèse où $\theta \in\ ]-\pi, 0[\, \cup\, [0, \pi]$ et montrer que, dans ce cas, la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_{n\to+\infty} \sin n\theta = l$. Envisageons trois cas :

Premier cas – Si $l = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sin n\theta = 0$. De deux choses l'une :

- Si $0 < \theta < \pi$, on va fixer un réel α tel que $0 < \alpha < \pi/2$ et montrer l'existence d'une infinité d'entier n_k tels que :

$$\alpha + k2\pi \leq n_k\theta \leq \alpha + k2\pi + (\pi - 2\alpha)\,.$$

Cela nous donnera une sous-suite $(\sin n_k\theta)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\sin\alpha \leq \sin n_k\theta$ pour tout k (FIG. 1), de sorte que cette sous-suite ne puisse pas converger vers 0, ce qui est absurde. En fait l'existence d'un entier n_k tel que :

$$\frac{\alpha + k2\pi}{\theta} \leq n_k \leq \frac{\alpha + k2\pi}{\theta} + \frac{\pi - 2\alpha}{\theta}$$

est évidente si l'on choisit α pour que l'amplitude $\dfrac{\pi - 2\alpha}{\theta}$ de l'encadrement soit supérieure ou égale à 1. Comme :

$$\frac{\pi - 2\alpha}{\theta} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi - \theta}{2},$$

un tel choix de α est possible.

- Si $-\pi < \theta < 0$, on a $\sin n\theta = -\sin(n\,(-\theta))$ et le cas précédent montre que la suite $(\sin(n\,(-\theta)))_n$ ne tend pas vers 0. On en déduit que la suite $(\sin n\theta)_n$ ne tend pas vers 0 non plus.

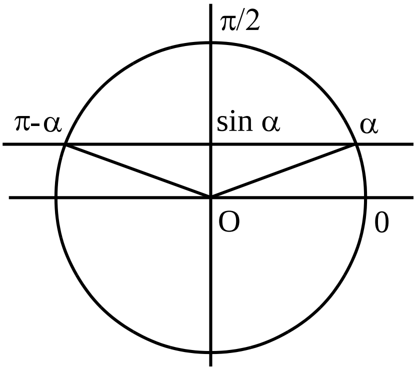

Figure 1: Visualisation sur le cercle trigonométrique

Deuxième cas – Si $l > 0$, on construit une sous-suite $(\sin n_k\theta)_k$ telle que $\sin n_k\theta \leq 0$ pour tout k, ce qui contredira l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \sin n\theta = l$. On a (en supposant par exemple $\theta > 0$, le traitement étant identique lorsque $\theta < 0$) :

$$\begin{aligned}\sin n_k\theta \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \pi + k2\pi \leq n_k\theta \leq \pi + k2\pi + \pi \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi + k2\pi}{\theta} \leq n_k \leq \frac{\pi + k2\pi}{\theta} + \frac{\pi}{\theta}\end{aligned}$$

avec $0 < \theta < \pi$, donc avec $\pi/\theta > 1$. L'amplitude de l'encadrement de n_k étant supérieure ou égale à 1, il sera possible de trouver au moins un entier naturel n_k entre ces bornes. On peut même obtenir ainsi une suite croissante $(n_k)_k$ de ces entiers pour des valeurs croissantes de k, avec $\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, ce qui permet de conclure.

Troisième cas – Si $l < 0$, on construit une sous-suite $(\sin n_k\theta)_k$ telle que $\sin n_k\theta \geq 0$ pour tout k, ce qui permet encore d'aboutir à une absurdité. En supposant toujours que $\theta > 0$ (le cas où $\theta < 0$ se traitant de façon similaire), on peut écrire :

$$\sin n_k\theta \geq 0 \;\Leftrightarrow\; k2\pi \leq n_k\theta \leq k2\pi + \pi \;\Leftrightarrow\; \frac{k2\pi}{\theta} \leq n_k \leq \frac{k2\pi}{\theta} + \frac{\pi}{\theta}$$

avec $0 < \theta < \pi$, donc avec $\pi/\theta > 1$. L'amplitude de l'encadrement de n_k étant supérieure ou égale à 1, l'existence de la suite croissante $(n_k)_k$ est assurée comme en b).

Conclusion : on a obtenu une absurdité dans chacun des trois cas envisagés. On peut donc affirmer que la suite $(\sin n\theta)_n$ diverge.